

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»

Составители: Ю.Б. Егорова
И.М. Мамонов

МОСКВА 2019

Равномерный закон распределения: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2019. - 8 с.

© Егорова Ю.Б.,
Мамонов И.М.,
составление, 2019

©МАИ, 2019

1. РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Равномерный закон распределения имеют непрерывные случайные величины, которые могут с одинаковой вероятностью принимать любые значения из некоторого интервала числовой оси.

Примеры случайных величин, имеющих равномерный закон распределения: ошибки округлений при числовых расчетах; ошибки округлений отсчетов измерительных приборов до целых делений шкал; время ожидания какого-либо события, происходящего через определенные промежутки времени (время ожидания автобуса, поезда и т.п.) и др.

1.2. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) постоянна в некотором интервале (a, b) и имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

где a и b - параметры распределения.

1.3. Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

1.4. Числовые характеристики случайной величины, имеющей равномерный закон распределения:

Математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

Моды M_o нет.

Медиана $Me = M(X).$

Коэффициент асимметрии $A=0.$

Коэффициент эксцесса $\varepsilon=1,8$; **эксцесс** $E=\varepsilon-3=-1,2.$

1.5. Вероятность попадания в заданный интервал. Вероятность того, что случайная величина X , имеющая равномерный закон распределения, попадет в заданный интервал (α, β) , равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

или

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

ПРИМЕР 1. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Время ожидания поезда – это непрерывная случайная величина (НСВ) X , имеющая равномерный закон распределения вероятностей. Найти интегральную и дифференциальную функции распределения НСВ X . Определить числовые характеристики случайной величины X . Найти вероятность того, что пассажиру придется ждать поезда не более минуты.

РЕШЕНИЕ.

НСВ X – время ожидания поезда – может принять любое значение в интервале от 0 до 2 мин ($a=0$, $b=2$).

Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Числовые характеристики НСВ X :

Математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = 1 \text{ мин.}$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3} \text{ мин}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ мин.}$$

Моды Mo нет.

Медиана $Me = M(X) = 1 \text{ мин.}$

Определим вероятность того, что пассажиру придется ждать поезда не более одной минуты:

$$P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}.$$

или

$$P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа (деления). Ошибка округления распределена по равномерному закону. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

РЕШЕНИЕ. НСВ X – ошибка округления – может принять любое значение в интервале от 0 до 0,1 А ($a=0$, $b=0,1$).

Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{0,1} = 10 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,1, \\ 0 & \text{при } x > 0,1. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{0,1} = 10x & \text{при } 0 < x \leq 0,1, \\ 1 & \text{при } x > 0,1. \end{cases}$$

Ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале от 0,02 до 0,08 А. Тогда вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А:

$$P(0,02 < X < 0,08) = F(0,08) - F(0,02) = \frac{0,08 - 0,02}{0,1} = 0,6$$

или

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10x dx = 0,6.$$

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения НСВ X , имеющей равномерный закон распределения.
2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию с интервалом 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.
3. Цена деления шкалы прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа (деления). Ошибка округления распределена по равномерному закону. Найти: а) числовые характеристики этой случайной величины; б) вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка менее 0,04.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое распределение вероятностей называется равномерным?
2. Чему равны числовые характеристики случайной величины, имеющей равномерное распределение?
3. Как можно найти вероятность попадания случайной величины X , имеющей равномерный закон распределения, в заданный интервал (α, β) ?
4. Приведите примеры случайных величин, имеющих равномерное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. Шк. 2001. – 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. Шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. Шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины.....	2
2. Задачи для самостоятельного решения.....	6
Контрольные вопросы.....	7
Литература.....	7

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»